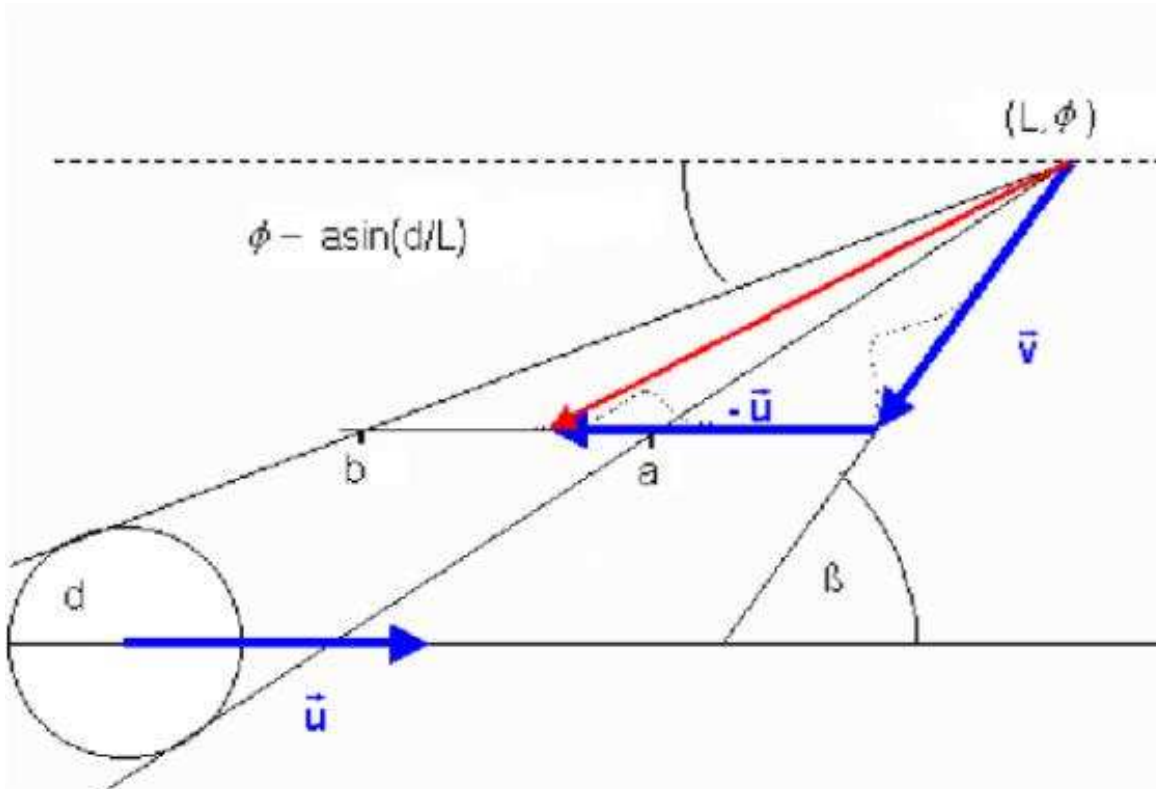


1. Wahrscheinlichkeit von $\beta\epsilon\tau\alpha$



Der Text von [beta.pdf](#) (LB) sei vorerst unverändert. Ergänzt werden könnte, daß A und B als neue Integrationsgrenzen ohne funktionale Abhängigkeiten verwendet werden, weil diese beim Integrieren nach u und v sowieso als Konstanten behandelt werden.

Mit $A * v$ und $B * v$ ergibt sich aus:

$$\int_{A \cdot v}^{B \cdot v} \frac{u}{\sigma^2} \cdot e^{\frac{-u^2}{2 \cdot \sigma^2}} du$$

$$pu(v, A, B) := -\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{B^2}{\sigma^2}\right) + \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{A^2}{\sigma^2}\right)$$

als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Geschwindigkeit des ausgewählten Probedeilchens am Ursprung zwischen $A * v$ und $B * v$, die aber noch von L, ϕ und β abhängen.

Das wird nun in den zweiten Teil des Doppelintegrals eingesetzt, wobei vorläufig vereinfachend die gleiche Maxwellverteilung vorausgesetzt wird:

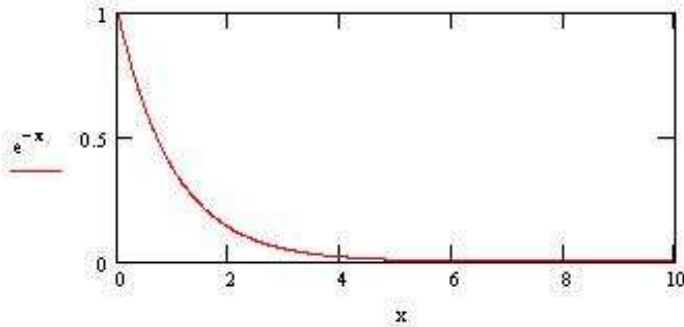
$$\int_0^{\infty} \left[e^{\left(\frac{-v^2 \cdot A^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)} - e^{\left(\frac{-v^2 \cdot B^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)} \right] \cdot \frac{v}{\sigma^2} \cdot e^{\left(\frac{-v^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)} dv$$

und ergibt vereinfacht:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left[\frac{\sigma}{(1+B^2)} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{v^2}{\sigma^2} \cdot \frac{B^2}{\sigma^2}\right) \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{v^2}{\sigma^2}\right) - \frac{\sigma}{(A^2+1)} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{v^2}{\sigma^2} \cdot \frac{A^2}{\sigma^2}\right) \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{v^2}{\sigma^2}\right) \right] + \frac{(B^2 - A^2)}{[(1+B^2) \cdot (A^2+1)]}$$

Der erste Teil verschwindet für v bzw. x -> ∞:

x := 0,0.01 .. 10



Deshalb wird mit:

$$A(L, \phi, \beta) := \begin{cases} 0 & \text{if } \phi - \text{asin}\left(\frac{1}{L}\right) \leq \beta \leq \phi + \text{asin}\left(\frac{1}{L}\right) \\ \max\left(\sin(\beta) \cdot \cot\left(\phi + \text{asin}\left(\frac{1}{L}\right)\right) - \cos(\beta), 0\right) & \text{if } \left(0 < \text{sign}\left(\sin\left(\phi + \text{asin}\left(\frac{1}{L}\right)\right)\right)\right) \\ \max\left(\sin(\beta) \cdot \cot\left(\phi - \text{asin}\left(\frac{1}{L}\right)\right) - \cos(\beta), 0\right) & \text{if } \left[\left(0 < \phi - \text{asin}\left(\frac{1}{L}\right)\right) \cdot \left(0 > \text{sign}(\sin(\phi))\right)\right] \\ 0 & \text{if } \left[\left(\beta > \pi\right) + \left(\beta < \phi - \text{asin}\left(\frac{1}{L}\right)\right)\right] \cdot \text{sign}(\sin(\phi)) > 0 \\ 0 & \text{if } \left(\pi - \text{asin}\left(\frac{1}{L}\right) < \phi < \pi + \text{asin}\left(\frac{1}{L}\right)\right) \cdot \text{sign}(\cos(\phi)) < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B(L, \phi, \beta) := \begin{cases} 0 & \text{if } \left(\phi - \text{asin}\left(\frac{1}{L}\right) \geq \beta\right) + (\beta \geq \pi) \\ 11111 & \text{if } \left[\left(\sin(\beta) \cdot \cot\left(\phi - \text{asin}\left(\frac{1}{L}\right)\right) - \cos(\beta)\right) > 11111\right] \\ 11111 & \text{if } \left(-\text{asin}\left(\frac{1}{L}\right) < \phi < \text{asin}\left(\frac{1}{L}\right)\right) \\ \max\left[\left(\sin(\beta) \cdot \cot\left(\phi - \text{asin}\left(\frac{1}{L}\right)\right) - \cos(\beta)\right), 0\right] & \text{if } 0 < \text{sign}\left(\sin\left(\phi - \text{asin}\left(\frac{1}{L}\right)\right)\right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

aus:

$$P(L, \phi, \beta) := \begin{cases} 0 & \text{if } \left(\phi < -\text{asin}\left(\frac{1}{L}\right)\right) + B(L, \phi, \beta) < A(L, \phi, \beta) \\ \frac{(B(L, \phi, \beta))^2 - A(L, \phi, \beta)^2}{\left[\left(1 + B(L, \phi, \beta)^2\right) \cdot \left(A(L, \phi, \beta)^2 + 1\right)\right]} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P := \frac{(B^2 - A^2)}{[(1+B^2) \cdot (A^2+1)]}$$

Damit ergibt sich nun graphisch beispielsweise mit L = 2.0379:

$$N := 100$$

$$M := 120$$

$n := 0..N$ β -Werte

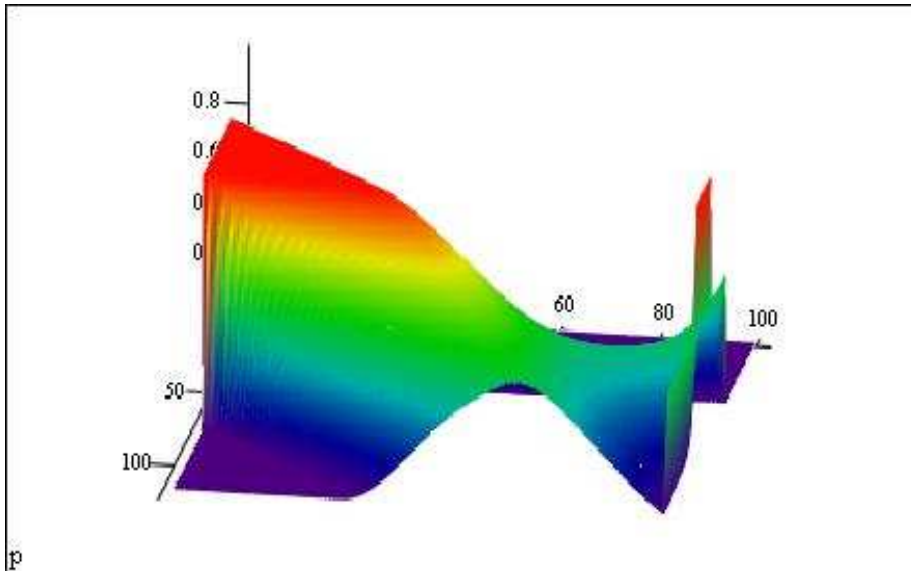
$m := 0..M$

ϕ -Wert e , die immer kleiner als β sind

$$\beta_n := n \cdot \frac{\pi}{N}$$

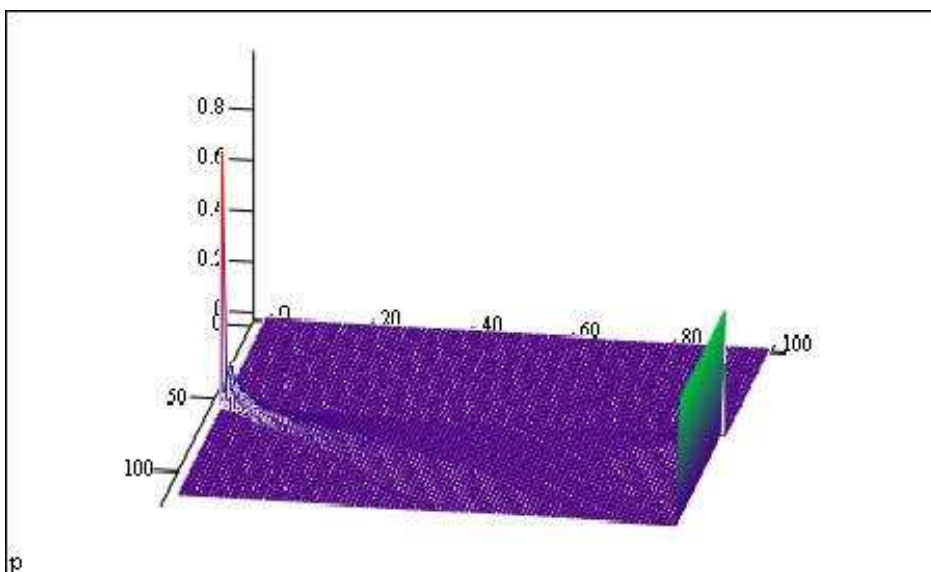
$$\phi_{m,n} := \frac{-\pi}{2} + \frac{m}{M} \cdot \pi$$

$$p_{m,n} := P(2.037926, \phi_{m,n}, \beta_n)$$



Das besitzt noch eine gewisse Aussagefähigkeit, aber das Gleiche für eine entferntere Herkunft $L = 318.309363$ ($1/\text{asin}(\pi/1000)$):

$$p_{m,n} := P(318.309363, \phi_{m,n}, \beta_n)$$



ergibt die Anhäufung in einem schmalen Bereich. Deshalb wurde in "Frontalstossbeweis" der geplottete Bereich nur eng um diese wähle. Die dabei verloren gehende Wahrscheinlichkeit an

den Rändern verfälscht das Ergebnis der gleichen Flächen.

Dieser Verlauf entspricht dem auch schon auf der Homepage dargestellten und sollte zeigen, was ich immer behauptete: Im dünnem Medium, dem eine durchschnittlich weite Herkunft entspricht, kommen viel mehr kleine Winkel β vor. Das heißt, es gibt mehr Frontalstöße.

Die abschließende Behauptung in beta.pdf (LB) "Insgesamt halten wir fest: Die Stoßwahrscheinlichkeit beträgt $\arcsin(d/L)/\pi$ unabhängig von β oder der zugrunde liegenden Geschwindigkeitsverteilung." sollten wir aber trotzdem noch einmal überdenken. Die starke Verschiebung zu kleinen β ist offensichtlich. Gegenargument ist die gleich bleibende Flächengröße pro β und L . Diese ermittelt sich durch das Integral über alle zum Stoß führenden ϕ . Für unzulässige ϕ nehme ich den P-Wert 0, weil dann ja kein Stoß stattfinden kann. Nur damit das Integral auf die Seite paßt, setze ich:

$$g(L) := a \sin\left(\frac{1}{L}\right)$$

$$FI(L, \beta) := \int_{-\pi}^{\pi} P(L, \phi, \beta) d\phi$$

Für die obigen L berechne ich nun einige Beispielflächen:

$$FI(2.037926, 0.1) = 1.025774 \quad FI(2.037926, 0.2) = 1.025775 \quad FI(2.037926, 0.3) = 1.025774$$

$$FI(2.037926, 0.4) = 1.02577 \quad FI(2.037926, 0.5) = 1.025766 \quad FI(2.037926, 0.6) = 1.02577$$

$$FI(2.037926, 0.7) = 1.025769 \quad FI(2.037926, 0.8) = 1.025774 \quad FI(2.037926, 0.9) = 1.025769$$

$$FI(6.339832, 0.1) = 0.316789 \quad FI(6.339832, 0.2) = 0.316789 \quad FI(6.339832, 0.3) = 0.316796$$

$$FI(6.339832, 0.4) = 0.31679 \quad FI(6.339832, 0.5) = 0.316809 \quad FI(6.339832, 0.6) = 0.316791$$

$$FI(6.339832, 0.7) = 0.316791 \quad FI(6.339832, 0.8) = 0.316789 \quad FI(6.339832, 0.9) = 0.316793$$

$$FI(318.309363, 0.1) = 6.339958 \times 10^{-3}$$

$$FI(318.309363, 0.2) = 6.282902 \times 10^{-3} \quad FI(318.309363, 0.3) = 6.284871 \times 10^{-3}$$

$$FI(318.309363, 0.4) = 6.283223 \times 10^{-3}$$

$$FI(318.309363, 0.5) = 6.282352 \times 10^{-3} \quad FI(318.309363, 0.6) = 6.28529 \times 10^{-3}$$

$$FI(318.309363, 0.7) = 6.282233 \times 10^{-3}$$

$$FI(318.309363, 0.8) = 6.283345 \times 10^{-3} \quad FI(318.309363, 0.9) = 6.283601 \times 10^{-3}$$

Hier entsteht der Eindruck, daß für beliebige β wegen der annähernd gleichen Flächengrößen die Wahrscheinlichkeiten gleich sind. Zu untersuchen ist deshalb der Grund, auch noch für die kleinen Abweichungen. Weiter ist auch zu überlegen, ob eine mehrfache Zählung der Winkelbereiche von ϕ berücksichtigt werden muß. Bei der einfachen Aufteilung, die bei schmalen Geschwindigkeitsdichten fast alle Wahrscheinlichkeiten umfassen könnte, entsteht:

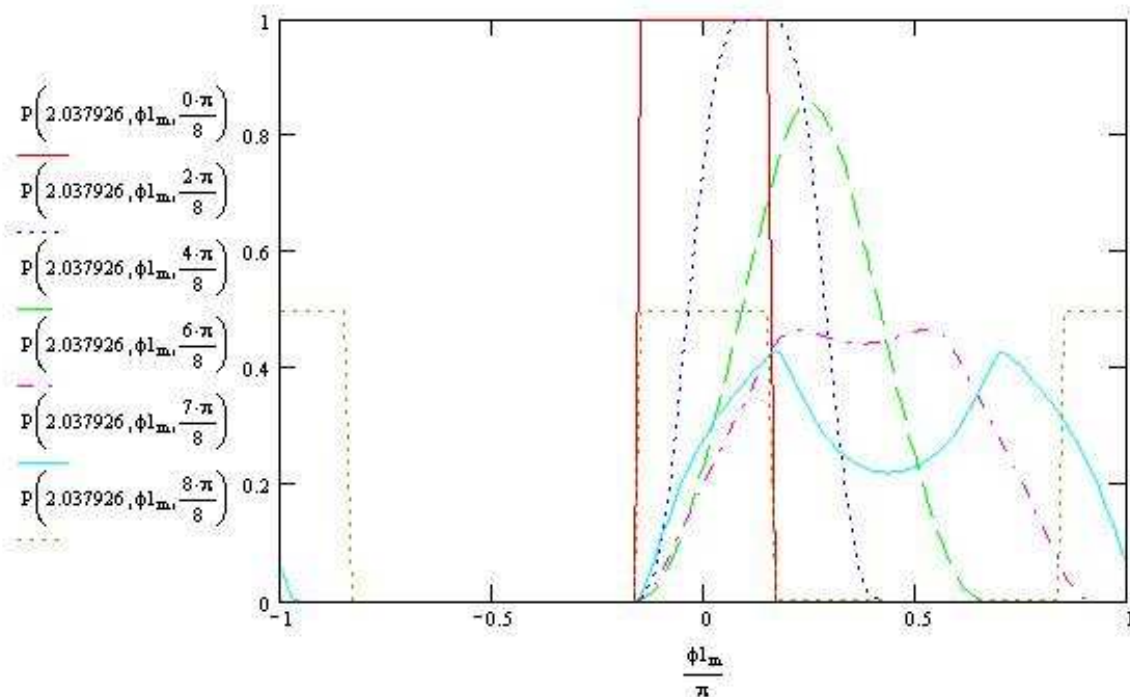
$$FI(L, \beta) := \int_{\beta-0.1}^{\beta} P(L, \phi, \beta) d\phi$$

$F(2.037926, 0.1) = 0.1$	$F(2.037926, 0.2) = 0.1$	$F(2.037926, 0.3) = 0.1$
$F(2.037926, 0.4) = 0.1$	$F(2.037926, 0.5) = 0.1$	$F(2.037926, 0.6) = 0.099166$
$F(2.037926, 0.7) = 0.093427$	$F(2.037926, 0.8) = 0.083435$	$F(2.037926, 0.9) = 0.072047$

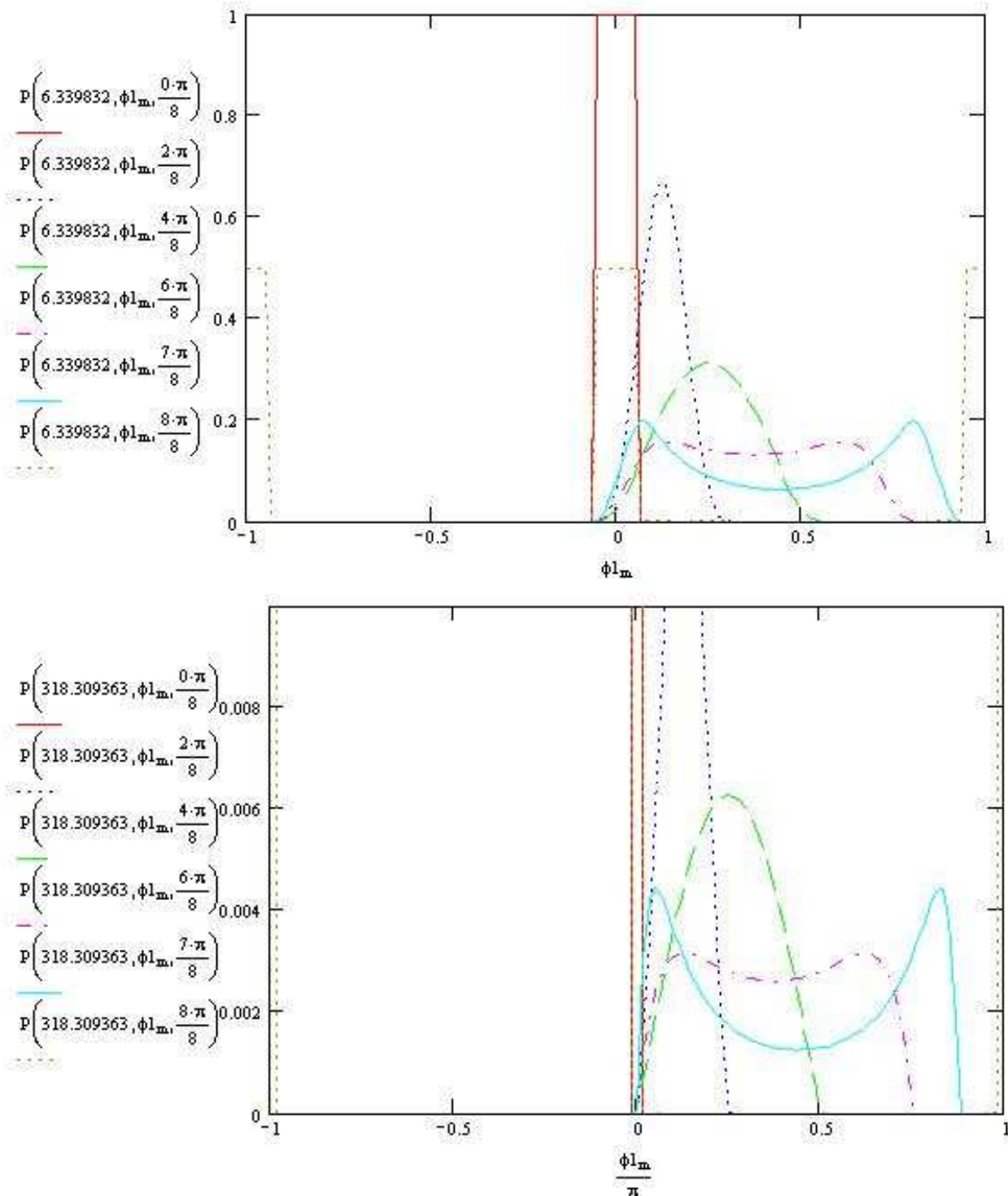
$F(6.339832, 0.1) = 0.1$	$F(6.339832, 0.2) = 0.099177$	$F(6.339832, 0.3) = 0.081158$
$F(6.339832, 0.4) = 0.053901$	$F(6.339832, 0.5) = 0.034663$	$F(6.339832, 0.6) = 0.023275$
$F(6.339832, 0.7) = 0.016561$	$F(6.339832, 0.8) = 0.012436$	$F(6.339832, 0.9) = 9.779712 \times 10^{-3}$

$F(318.309363, 0.1) = 6.281062 \times 10^{-3}$	$F(318.309363, 0.2) = 3.141339 \times 10^{-3}$	$F(318.309363, 0.3) = 1.267255 \times 10^{-3}$
$F(318.309363, 0.4) = 6.439033 \times 10^{-4}$	$F(318.309363, 0.5) = 3.87648 \times 10^{-4}$	$F(318.309363, 0.6) = 2.612284 \times 10^{-4}$
$F(318.309363, 0.7) = 1.905314 \times 10^{-4}$	$F(318.309363, 0.8) = 1.473999 \times 10^{-4}$	$F(318.309363, 0.9) = 1.194144 \times 10^{-4}$

Für die 2D-Plots ergibt sich: $m := 0..M$ $\phi_{1_m} := -\pi + \frac{m}{M} \cdot 2 \cdot \pi$



Das entspricht genau Den Plots aus Lothar Brendel:"beta.pdf" und funktioniert auch für Zwischenwerte, aber noch nicht für alle, ja symmetrischen, β . Mit den großen L ergibt sich:



Hier nach den Bildern ergibt sich die gleiche Flächengröße für jeden ausgewählten Winkel β , was bedeutet, dass durch die möglichen Herkunftswinkel ϕ die **vermutete Asymmetrie verloren geht**.

2. Verfälschung der erwarteten Wahrscheinlichkeitsdichten in Abhängigkeit von den gewählten Laufvariablen:

$$M := 500 \quad m := 0 \dots M - 1$$

$$\beta := 0.7$$

$$\gamma := 2.5$$

$$\Phi_m := \frac{-\pi}{1} + \frac{m}{M} \cdot \pi \cdot 2$$

$$\Psi_m := \frac{-\pi}{1} + \beta \cdot \frac{m}{M} \cdot \pi \cdot 2$$

$$\rho_m := \frac{-\pi}{1} + \gamma \cdot \frac{m}{M} \cdot \pi \cdot 2$$

$$P_m := e^{-(\Phi_m)^2}$$

$$Q_m := e^{-(\Psi_m)^2}$$

$$R_m := e^{-(\rho_m)^2}$$

$$\frac{1}{M} \cdot \left(\sum_m P_m \right) = 0.282092$$

$$\frac{1}{M} \cdot \left(\sum Q_m \right) = 0.387562$$

$$\frac{1}{M} \cdot \left(\sum R_m \right) = 0.112837$$

Bei dieser Darstellung muß m mit geschrieben werden und erscheint auch an der x-Achse. Es gilt aber trotzdem:

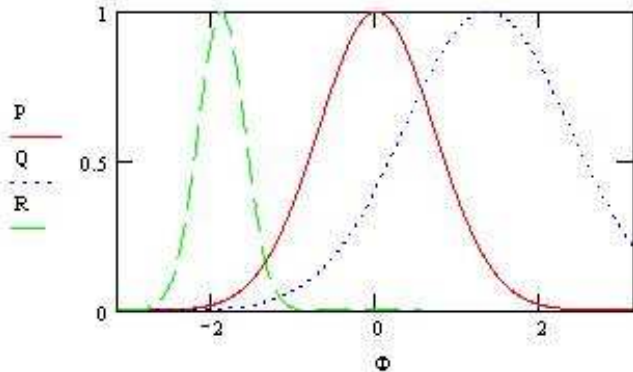
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Phi^2} d\Phi = 1.772454 \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Psi^2} d\Psi = 1.772454$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho = 1.772454$$

$$P := e^{-\Phi^2}$$

$$Q := e^{-\Psi^2}$$

$$R := e^{-\rho^2}$$



Ob Φ oder ψ oder ρ als Variable der x-Achse verwendet wird, ist egal. Der Verlauf ist aber gleich wie bei der obigen Darstellung. Es gilt ebenfalls:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Phi^2} d\Phi = 1.772454$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Psi^2} d\Psi = 1.772454$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho = 1.772454$$

Zum Vergleich nun eine $N(a,s)$ -Verteilung $f(x)$ und die dazugehörige Maxwellverteilung $f_m(x)$:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot s}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot s^2}}$$

$$f_m(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x < \alpha \\ \left[\frac{\sqrt{2} \cdot (x - \alpha)^2}{\sqrt{\pi} \cdot \sigma^3} \cdot e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 1.2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_m(x) dx = 1.2$$

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \right)^2} = 0.5$$

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_m(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_m(x) dx \right)^2} = 0.5$$

$$a \equiv 1.2$$

$$s \equiv 0.5$$

$$\sigma \equiv \frac{s}{\sqrt{3 - \frac{8}{\pi}}}$$

$$\sigma = 0.742457$$

$$\alpha \equiv a - \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sigma$$

$$\alpha = 0.01521$$

Dagegen:

$$P_n := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a)^2} dx$$

$$P_n = 1.772454$$

$$P(x) := \frac{e^{-(x-a)^2}}{P_n}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P(x) dx = 1.2$$

$$Q_n := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \cdot (x-a)^2} dx$$

$$Q_n = 2.118488$$

$$Q(x) := \frac{e^{-\beta \cdot (x-a)^2}}{Q_n}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot Q(x) dx = 1.2$$

$$R_n := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma \cdot (x-a)^2} dx$$

$$R_n = 1.120998$$

$$R(x) := \frac{e^{-\gamma \cdot (x-a)^2}}{R_n}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot R(x) dx = 1.2$$

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot P(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P(x) dx \right)^2} = 0.707107$$

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot Q(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot Q(x) dx \right)^2} = 0.845154$$

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot R(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot R(x) dx \right)^2} = 0.447214$$

$$x := -2, -2 + 0.01 \dots 4$$

