

Zum Winkel β

1 Geometrie

Wir folgen der Nomenklatur in

<http://uratom.keyspace.de/uratom/Image32.gif>, d.h. die grundsätzlichen Größen sind:

- d Durchmesser der stoßenden Teilchen
- \vec{u} Geschwindigkeit des im Ursprung startenden Probeteilchens
- \vec{v} Geschwindigkeit des Stoßpartners
- L Entfernung des Startpunktes des Stoßpartners vom Ursprung
- ϕ Winkel zwischen \vec{u} und dem Ortsvektor des Startpunktes des Stoßpartners
- β Winkel zwischen $-\vec{v}$ und \vec{u}

Das Koordinatensystem wählen wir so, dass die Geschwindigkeit \vec{u} in x -Richtung liegt, d.h. $\vec{u} = u\vec{e}_x$, dann können wir \vec{v} bequem über $v = |\vec{v}|$ und β zerlegen in

$$v_x = -v \cos \beta \quad (1)$$

$$v_y = -v \sin \beta \quad , \quad (2)$$

und für die Relativgeschwindigkeit $\vec{w} \equiv \vec{v} - \vec{u}$ schreiben

$$w_x = v_x - u \quad (3)$$

$$w_y = v_y \quad . \quad (4)$$

Gesucht sind nun diejenigen u , für die ein Stoß erfolgt.

1.1 $d = 0$

Nehmen wir zunächst einen Durchmesser $d = 0$ an, d.h. für einen Stoß hat \vec{w} exakt in Gegenrichtung von ϕ zu zeigen, es muss also gelten

$$\cos \phi = -\frac{w_x}{w} \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \cos \phi = -\frac{v_x - u}{\sqrt{(v_x - u)^2 + v_y^2}} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \cos^2 \phi = \frac{(v_x - u)^2}{(v_x - u)^2 + v_y^2} \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow u = v_x \pm |v_y \cot \phi| \quad . \quad (8)$$

Die Bedingung $v_y \sin \phi < 0$ zusammen mit dem Zurückrechnen von \vec{v} auf Betrag und Winkel liefert dann

$$u = v(\sin \beta \cot \phi - \cos \beta) \quad (9)$$

$$\text{und } 0 < \sin \beta \sin \phi \quad (10)$$

als Stoßbedingung.

Die Pole des Cotangens sind nicht etwa Ausdruck einer ungeschickten Wahl des Koordinatensystems, sondern haben eine physikalische Bedeutung: Ist $\sin \phi$ im Gegensatz zu $\sin \beta$ sehr klein, d.h. der Stoßpartner befindet sich sehr nahe an der ungestörten Trajektorie des Probeteilchens, „zielt“ aber deutlich quer, so ist ein sehr großes u nötig, um ihn doch noch zu erreichen. Für $\sin \phi = 0$ ist dies gar nicht mehr möglich, allein bei $\sin \beta = 0$ kann dann noch ein Stoß erfolgen. Umgekehrt erfordert ein $\sin \beta = 0$ auch ein $\sin \phi = 0$ (da das Probeteilchen nicht quer fliegen kann) und so ist die Stoßbedingung zu ergänzen um

$$0 = \sin \beta = \sin \phi \quad (11)$$

$$\text{und } 0 < (u + v \cos \beta) \cos \phi \quad (12)$$

Für den Spezialfall dass $u = v$ vorgegeben ist, erfordert (9) offensichtlich

$$\sin \beta \cot \phi = 1 + \cos \beta \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow \cot \phi = \cot \frac{\beta}{2}, \quad (14)$$

d.h. wegen (10) also $\phi = \beta/2$. Die Herkunftsentfernung L taucht in diesem Ergebnis gar nicht auf, sie bestimmt lediglich den Zeitpunkt des Stoßes: L/v

1.2 $d > 0$

Für ein endliches d bekommen wir ein Intervall von Winkeln, die zum Stoß führen. Mit der Abkürzung

$$\varepsilon \equiv \arcsin(d/L) \quad (15)$$

sind dessen Grenzen

$$\phi_a \equiv \phi + \varepsilon \quad (16)$$

$$\phi_b \equiv \phi - \varepsilon, \quad (17)$$

denen wir die Größen

$$\hat{a} \equiv \sin \beta \cot \phi_a - \cos \beta \quad (18)$$

$$\hat{b} \equiv \sin \beta \cot \phi_b - \cos \beta \quad (19)$$

zuordnen. Diese können nicht unmittelbar als Intervallgrenzen für u/v dienen, da zum einen für $\sin \beta < 0$ der Wert \hat{a} größer als \hat{b} wird, und zum anderen die Situationen, in

$\text{sgn}(\sin\beta)$	$\text{sgn}(\cos\beta)$	$\text{sgn}(\sin\phi_a)$	$\text{sgn}(\sin\phi_b)$	$\text{sgn}(\cos\phi)$	Ort	Richtung	Stoß möglich	A	B
1	1 $\bar{1}$ 0	1	1	1 $\bar{1}$ 0	\vdots	↓	✓	\hat{a}	\hat{b}
1	1 $\bar{1}$ 0	1	$\bar{1}$ 0	1	\vdots	↓	✓	\hat{a}	∞
1	1 $\bar{1}$ 0	$\bar{1}$ 0	1	$\bar{1}$	\vdots	↓	✓	$-\infty$	\hat{b}
1	1 $\bar{1}$ 0	$\bar{1}$ 0	$\bar{1}$ 0	1 $\bar{1}$ 0	\vdots	↓	✗	-	-
$\bar{1}$	1 $\bar{1}$ 0	1 0	1 0	1 $\bar{1}$ 0	\vdots	↑	✗	-	-
$\bar{1}$	1 $\bar{1}$ 0	1 0	$\bar{1}$	1	\vdots	↑	✓	\hat{b}	∞
$\bar{1}$	1 $\bar{1}$ 0	$\bar{1}$	1 0	$\bar{1}$	\vdots	↑	✓	$-\infty$	\hat{a}
$\bar{1}$	1 $\bar{1}$ 0	$\bar{1}$	$\bar{1}$	1 $\bar{1}$ 0	\vdots	↑	✓	\hat{b}	\hat{a}
0	1	1	1	1 $\bar{1}$ 0	\vdots	←	✗	-	-
0	1	1 0	$\bar{1}$ 0	1	\vdots	←	✓	-1	∞
0	1	$\bar{1}$ 0	1 0	$\bar{1}$	\vdots	←	✓	$-\infty$	-1
0	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$	1 $\bar{1}$ 0	\vdots	←	✗	-	-
0	$\bar{1}$	1	1	1 $\bar{1}$ 0	\vdots	→	✗	-	-
0	$\bar{1}$	1 0	$\bar{1}$ 0	1	\vdots	→	✓	1	∞
0	$\bar{1}$	$\bar{1}$ 0	1 0	$\bar{1}$	\vdots	→	✓	$-\infty$	1
0	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	1 $\bar{1}$ 0	\vdots	→	✗	-	-

Tabelle 1: Die 16 unterschiedlichen Situationen, die bei der Berechnung der zum Stoß führenden Geschwindigkeiten u unterschieden werden müssen; das Resultat ist $u \in [v_A \dots v_B]$. In den ersten fünf Spalten ist $\bar{1}$ die Kurzform für -1 , die parallelen Linien bei „Ort“ symbolisieren den Korridor $y \leq d$, und \hat{a} bzw. \hat{b} in den Spalten für A und B sind die Werte aus (18) und (19).

denen das Intervall $[\phi_a \dots \phi_b]$ einen Pol des Cotangens enthält, gesondert zu behandeln sind. Insgesamt können wir 16 Fälle unterscheiden, die in Tabelle 1 aufgeführt sind. A und B bezeichnen darin die tatsächlichen Grenzen. Doch auch diese berücksichtigen noch nicht die Tatsache, dass u der Betrag einer Geschwindigkeit ist. Wir müssen also nachträglich noch

$$A \rightarrow \max\{A, 0\} \quad (20)$$

$$B \rightarrow \max\{B, 0\} \quad (21)$$

ersetzen. Dadurch treten nun neben den in der Tabelle mit „-“ markierten auch solche Fälle auf, in denen wir das Nichtzustandekommen eines Stoßes durch $A = B = 0$ ausdrücken.

2 Verteilungen

2.1 Gleichgewicht

Nachdem die Intervallgrenzen A und B bestimmt sind, ist die Stoßwahrscheinlichkeit durch $P(u \in [vA \dots vB])$ auszudrücken. Im Gleichgewicht in zwei Dimensionen ist für eine fest gewählte Richtung der Betrag u von \vec{u} verteilt gemäß

$$dp_u = \frac{u}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du \quad , \quad (22)$$

so dass die Wahrscheinlichkeit für $u \in [vA \dots vB]$ gerade

$$p_u(vA, vB) \equiv \int_{vA}^{vB} p(u) du = \exp\left(-\frac{v^2 A^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{v^2 B^2}{2\sigma^2}\right) \quad (23)$$

beträgt. Mitteln wir über v gemäß der selben Verteilung wie (22), so erhalten wir die Stoßwahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P &\equiv \int_0^\infty p_u(vA, vB) \frac{v}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) dv \\ &= \frac{B^2 - A^2}{(B^2 + 1)(A^2 + 1)} \quad . \end{aligned} \quad (24)$$

Es fällt auf, dass P nicht von σ abhängt. Das kann es auch nicht, da σ die *einzig*e Geschwindigkeit ist, die in diesem Problem vorkommt und P selbst als Wahrscheinlichkeit dimensionslos ist.

Die Abbildungen 1 und 2 zeigen die Funktion $P(\phi)$ für unterschiedliche Werte von β und $\varepsilon = \arcsin(d/L)$. Die in den Abbildungen jeweils numerisch bestimmten Werte für

$$\langle P \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\phi) d\phi \quad (25)$$

legen die Beziehung

$$\langle P \rangle = \frac{\varepsilon}{\pi} \quad (26)$$

unabhängig von β nahe. Wenn wir also sehr viele Versuche durchführen mit jedesmal (gleichverteilt) zufällig ausgewähltem ϕ , so werden wir als relative Häufigkeit für Stöße den Wert aus (26) erhalten, der gerade dem Winkelanteil eines Teilchens mit Radius d an einem Kreis mit Radius L darstellt.

Dieser Zusammenhang ist in der Tat physikalisch zu verstehen (zum mathematischen Nachweis siehe Abschnitt 2.4). Wir kehren dafür die Betrachtungsweise etwas um und weisen dem Stoßpartner den Radius d und dem Probeteilchen den Radius Null zu (tatsächlich ist ja jede Radienkombination, die als Summe d ergibt, äquivalent). Anschließend ersetzen wir den einen Stoßpartner durch einen „Kranz“ aus $N = 2\pi/(2\varepsilon)$

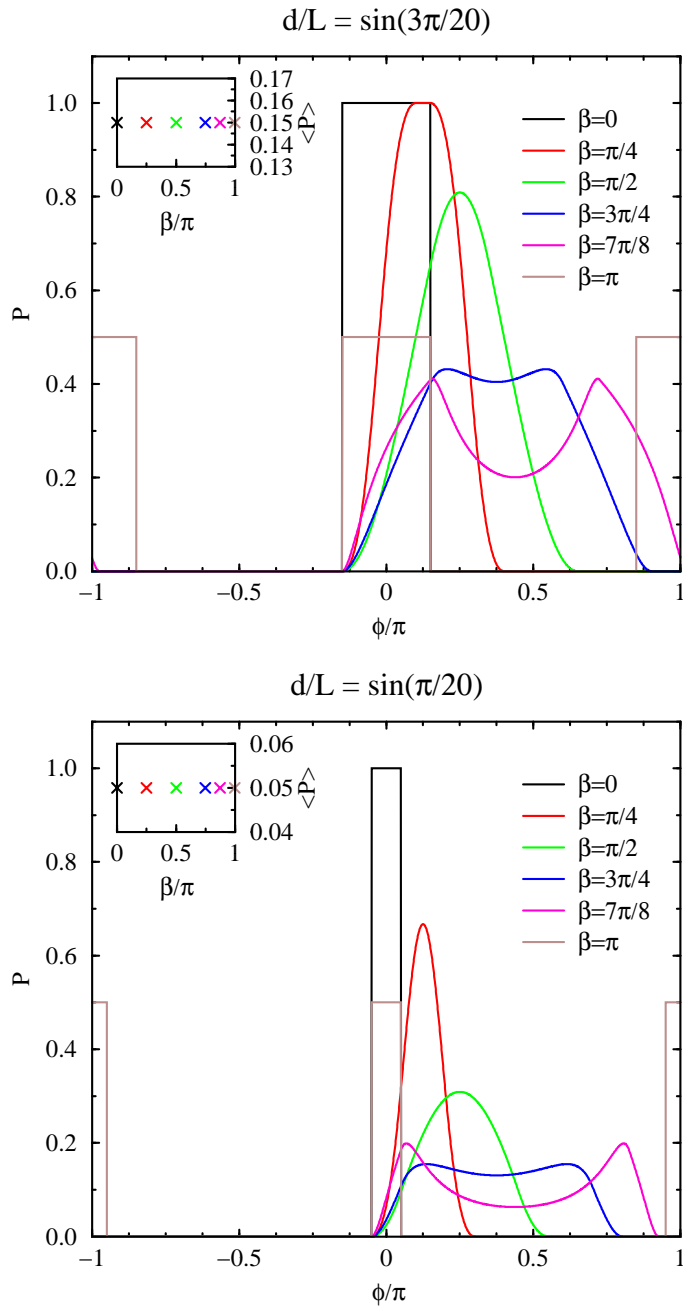


Abbildung 1: Die Stoßwahrscheinlichkeit P als Funktion des Herkunftswinkels ϕ für nahe Ausgangsorte. Die Grenzfälle $\beta = 0$ und $\beta = \pi$ (entgegengesetzte bzw. gleiche Flugrichtung) sind leicht zu interpretieren. Im ersten Fall erfolgt mit Sicherheit ein Stoß, wenn nur der Stoßpartner (SP) sich im Korridor $|y| \leq d \Leftrightarrow |\sin \phi| \leq \varepsilon$ befindet. Bei gleicher Flugrichtung muss sich der SP ebenfalls im Korridor aufhalten, kann aber vor oder hinter dem Probeteilchen starten und es besteht jeweils 50% Wahrscheinlichkeit des Einholens. Die β -Werte dazwischen zeigen deutlich den Übergang von einem zu zwei Maxima. Der kleine, eingefügte Plot zeigt die mittlere Wahrscheinlichkeit, d.h. das (numerisch bestimmte) $1/2\pi \int P d\phi$.

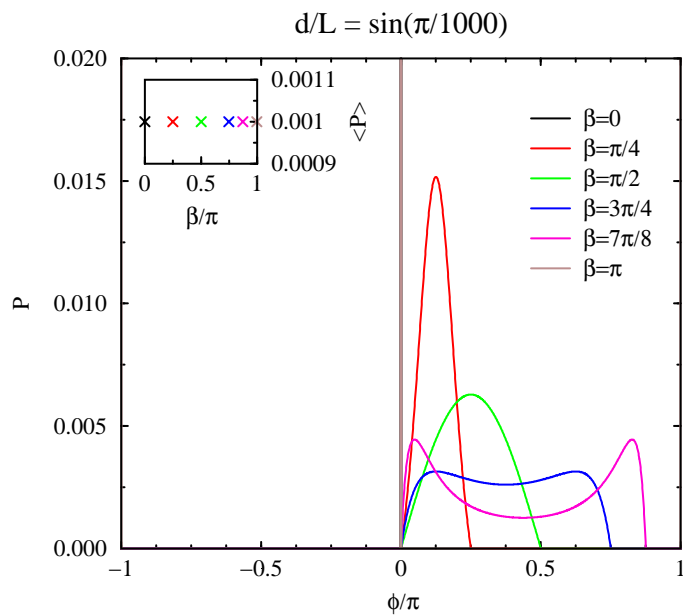
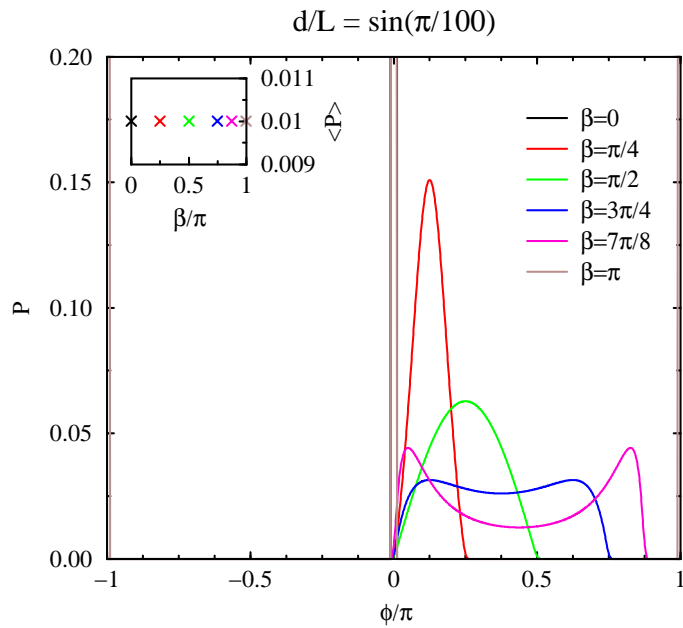


Abbildung 2: Die Stoßwahrscheinlichkeit P für ferne Ausgangsorte. Die Peaks für $\beta = 0$ und $\beta = \pi$ werden beliebig schmal, behalten aber ihre Amplitude 1 bzw. $1/2$ bei, während die der anderen Kurven abnimmt. Dafür konvergieren letztere gegen eine feste Form, für die, wie sich schon in Abb. 1 abzuzeichnen beginnt, das „Aussmieren“ unterhalb von $\phi = 0$ und oberhalb von $\phi = \beta$ verschwindet: Außerhalb dieses Bereiches ist die Stoßwahrscheinlichkeit schließlich Null. Die über ϕ gemittelte Wahrscheinlichkeit bleibt eine *Konstante*. Für negative β ergibt sich im Übrigen der entsprechend gespiegelte Verlauf $P(-\phi)$.

Stoßpartnern, die also alle im Abstand L vom Probeteilchen starten und auch alle die selbe Geschwindigkeit (Richtung und Betrag) haben mögen. Damit kommt es auf jeden Fall¹ zum Stoß mit *einem*² der N Teilchen. Wir wissen zwar durch unsere Berechnung von $P(\phi)$, dass die Wahrscheinlichkeit nicht für alle gleich ist, aber wenn wir diese Information nicht nutzen, sondern einfach *irgendeines* der N Teilchen auswählen, so ist die Trefferchance gerade $1/N = \varepsilon/\pi$.

2.2 Andere Verteilungen

Die Argumentation im letzten Abschnitt ist offensichtlich völlig unabhängig von der gewählten Geschwindigkeitsverteilung³. Und in der Tat können wir statt der physikalisch motivierten Maxwell-Boltzmann-Verteilung auch Phantasiegebilde wie einen Kasten

$$dp_u = du \cdot \begin{cases} 1/\sigma & \text{wenn } 0 \leq u \leq \sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (27)$$

der zu

$$P(A, B) = \Phi(B) - \Phi(A) \quad (28)$$

$$\text{mit } \Phi(X) \equiv \begin{cases} \frac{X}{2} & \text{wenn } 0 \leq X \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2X} & \text{sonst} \end{cases} \quad (29)$$

führt, oder z.B. ein extrem breites Potenzgesetz

$$dp_u = \frac{\sigma}{(\sigma + u)^2} du \quad (30)$$

mit (bei 0 und 1 stetig ergänztem)

$$P(A, B) = B \frac{B-1-\ln B}{(B-1)^2} - A \frac{A-1-\ln A}{(A-1)^2} \quad (31)$$

einsetzen. Abbildung 3 zeigt die drastische Auswirkung auf die Form von $P(\phi)$, das Integral jedoch bleibt erhalten.

Insgesamt halten wir fest: Die Stoßwahrscheinlichkeit beträgt $\arcsin(d/L)/\pi$ unabhängig von β oder der zu Grunde liegenden Geschwindigkeitsverteilung.

¹Ausgenommen die Situationen, in denen \vec{u} und \vec{v} exakt übereinstimmen, aber diese Fälle haben die Wahrscheinlichkeit Null.

²Auch hier haben die Fälle, wo zwei Stoßpartner zugleich getroffen werden, das Maß Null.

³Darüberhinaus setzt sie nicht einmal voraus, dass Probeteilchen und Stoßpartner der *selben* Verteilung gehorchen.

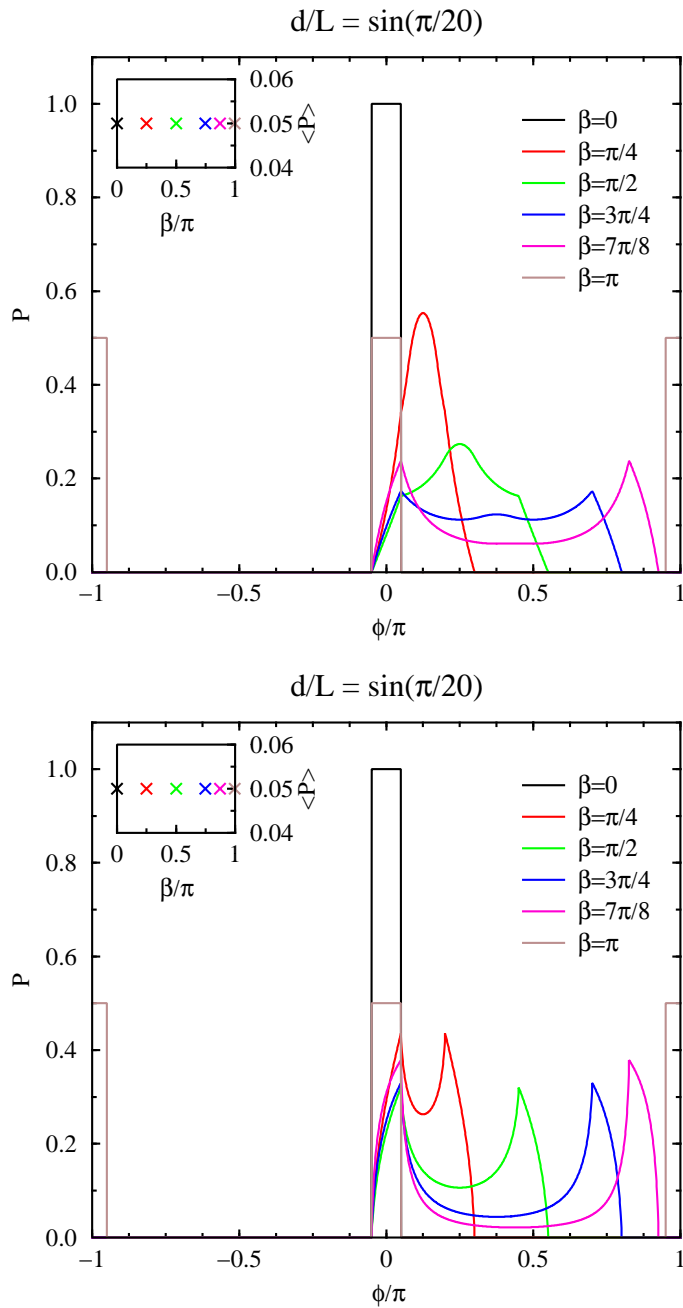


Abbildung 3: Die Stoßwahrscheinlichkeit $P(\phi)$ für die Kasten-Verteilung (27) (oben) bzw. das Potenzgesetz (30) (unten). Der symmetrische Fall $\phi = \beta/2$ zeigt für erstere ein Maximum, für letztere dagegen ein Minimum. Dies kann als Überbleibsel von Gleichung (14) verstanden werden: Für die Kastenverteilung sind größenordnungsmäßig gleiche Werte von u und v sehr wahrscheinlich und die „Strategie“ (14) zahlt sich aus. Beim Potenzgesetz dagegen sind u und v typischerweise sehr unterschiedlich und die an $\beta = \pm\pi$ angelehnte „Strategie des Einholens“ führt eher zum Stoß. Nichtsdestotrotz bleibt der Mittelwert bei beiden stets $\langle P \rangle = \varepsilon/\pi$.

2.3 Die allgemeine Form von P

Da für jede Geschwindigkeitsverteilung der Integrand in

$$P(A, B) = \int_0^{\infty} \int_{vA}^{vB} p(u)p(v) du dv \quad (32)$$

faktoriert, kann das innere Integral (über u) sofort durch die Verteilungsfunktion

$$F(u) \equiv \int_0^u p(u') du' \quad (33)$$

ausgedrückt werden. Damit wird aus $P(A, B)$ die Differenz

$$P(A, B) = \int_0^{\infty} F(vB)p(v) dv - \int_0^{\infty} F(vA)p(v) dv \equiv \Phi(B) - \Phi(A) \quad , \quad (34)$$

in der wir Φ allgemein definiert haben, und die Funktion (29) nur mehr den konkreten Fall der Kastenverteilung darstellt. Für die Maxwell-Verteilung (22) haben wir dagegen

$$\Phi(X) = \frac{X^2}{X^2 + 1} \quad , \quad (35)$$

während ihre Variante in drei Dimensionen

$$dp_u = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u^2}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du \quad (36)$$

die deutlich unhandlichere Funktion

$$\Phi(X) = \frac{1}{\pi} \left(2 \frac{X^3 - X}{(X^2 + 1)^2} + \arctan_1 \frac{2X}{1 - X^2} \right) \quad . \quad (37)$$

hervorbringt⁴. Die Potenzverteilung (30) schließlich liefert

$$\Phi(X) = X \frac{X - 1 - \ln X}{(X - 1)^2} \quad . \quad (38)$$

Zum Schluss stellen wir durch partielle Integration⁵ die Relation

$$\Phi(X) = 1 - \int_0^{\infty} p(vX)F(v)X dv = 1 - \Phi(1/X) \quad , \quad (39)$$

fest, welche $\Phi(1) = 1/2$ impliziert und sogar für die Grenzfälle $\Phi(0) = 0$ und $\Phi(X \rightarrow \infty) = 1$ gilt.

Damit können wir nun, ohne Umweg über die zu Grunde liegende Verteilung p , Funktionen P gemäß $P = \Phi(B) - \Phi(A)$ konstruieren, wenn nur Φ die Bedingungen

⁴Mit $\arctan_1(x)$ bezeichnen wir den Zweig der Umkehrfunktion des Tangens mit dem Wertebereich $[0 \dots \pi)$, an der Stelle $x = 0$ liegt dabei eine Unstetigkeit vor.

⁵Nur hier berufen wir uns auf gleiche Verteilungen von u und v .

$$(40a) \quad \Phi(0) = 0$$

$$(40b) \quad \Phi(X \rightarrow \infty) = 1$$

$$(40c) \quad \frac{d\Phi}{dX} \geq 0$$

$$(40d) \quad \Phi(X) + \Phi(1/X) = 1$$

erfüllt.

Beispiele sind die Verallgemeinerung von (35) in Form von

$$\Phi(X) = \frac{X^k}{X^k + 1} \quad (41)$$

mit positivem k oder auch

$$\Phi(X) = \frac{2}{\pi} \arctan(X) \quad , \quad (42)$$

und ganz allgemein lässt sich aus *jeder* beschränkten, monoton steigenden und ungeraden Funktion φ gemäß

$$\Phi(X) = \frac{\varphi(\ln X)}{2\varphi(\infty)} + \frac{1}{2} \quad (43)$$

eine Funktion mit den Eigenschaften (40) erzeugen.

2.4 Die Konstanz von $\langle P \rangle$

Wir untersuchen nun, wie sich die β -Unabhängigkeit von $\langle P \rangle$ *mathematisch* ergibt. Wählen wir zunächst $\sin(\beta) \geq 0$, so können wir die Zuweisungen an A und B kompakter (wenn auch weniger anschaulich) als in Abschnitt 1.2 ausdrücken durch

$$A = G(\beta, \phi + \varepsilon) \quad , \quad B = G(\beta, \phi - \varepsilon) \quad (44)$$

$$\text{mit} \quad G(\beta, \gamma) \equiv \begin{cases} 0 & \text{wenn } \gamma > \beta \\ \infty & \text{wenn } \gamma < 0 \\ \sin \beta \cot \gamma - \cos \beta & \text{sonst} \end{cases} \quad . \quad (45)$$

Sogar die entarteten Fälle $\beta = 0$ und $\beta = \pi$ werden durch (44) korrekt beschrieben. Für $\sin(\beta) < 0$ gilt alles Folgende entsprechend „spiegelverkehrt“, d.h. $\phi \rightarrow -\phi$ und A, B wechseln ihre Rollen.

Mit dieser Formulierung lassen sich nun in

$$2\pi \langle P \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (\Phi(G(\beta, \phi - \varepsilon)) - \Phi(G(\beta, \phi + \varepsilon))) d\phi \quad (46)$$

$$\equiv I_B - I_A \quad (47)$$

die Integrationsbereiche für die beiden Integrale geschickt aufteilen:

$$I_B : \begin{array}{c|ccc} \phi & B = G(\beta, \phi - \varepsilon) & \Phi(B) & \int \Phi d\phi \\ \hline -\pi \dots \varepsilon & \infty & 1 & \pi + \varepsilon \\ \varepsilon \dots \beta + \varepsilon & 0 \dots \infty & 0 \dots 1 & I^* \\ \beta + \varepsilon \dots \pi & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (48)$$

$$I_A : \begin{array}{c|ccc} \phi & A = G(\beta, \phi + \varepsilon) & \Phi(A) & \int \Phi d\phi \\ \hline -\pi \dots -\varepsilon & \infty & 1 & \pi - \varepsilon \\ -\varepsilon \dots \beta - \varepsilon & 0 \dots \infty & 0 \dots 1 & I^* \\ \beta - \varepsilon \dots \pi & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (49)$$

Das Integral I^* ist tatsächlich in beiden Fällen

$$I^* = \int_0^\beta \Phi(G(\beta, \gamma)) d\gamma \quad , \quad (50)$$

so dass als Endergebnis

$$2\pi \langle P \rangle = \underbrace{\pi + \varepsilon + I^* + 0}_{I_B} - \underbrace{(\pi - \varepsilon + I^* + 0)}_{I_A} = 2\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \langle P \rangle = \frac{\varepsilon}{\pi} \quad (51)$$

verbleibt. Wir sehen also: Nur in I^* stecken (über Φ) die Details der Geschwindigkeitsverteilung(en), doch gerade dieser Term fällt heraus. Für die Herleitung von (51) haben wir lediglich die allgemeingültigen Eigenschaften (40a) und (40b) benutzt, sowie die Tatsache, dass sich P überhaupt als Differenz $\Phi(B) - \Phi(A)$ ausdrücken lässt.

Konstruieren wir ein

$$P(A, B) \equiv \left(\frac{B}{B+1} - \frac{A}{A+1} \right)^2 \quad , \quad (52)$$

welches diese Eigenschaft nicht besitzt (und daher in Wirklichkeit gar keine Stoßwahrscheinlichkeit gemäß (32) sein kann), so sehen wir in Abbildung 4, dass in der Tat dessen $\langle P \rangle$ eine Abhängigkeit von β zeigt.

2.5 Die Symmetrie um $\phi = \beta/2$

Die speziellere Bedingung (40d) ist für die β -Unabhängigkeit von $\langle P \rangle$ offenbar gar nicht notwendig. Ihre Bedeutung wird klar, wenn man umformt

$$G(\beta, \beta/2 + \gamma) = \sin \beta \cot(\beta/2 + \gamma) - \cos \beta = \frac{\sin(\beta/2 - \gamma)}{\sin(\beta/2 + \gamma)} \quad , \quad (53)$$

so dass also die Symmetrie

$$G(\beta, \beta/2 - \gamma) \cdot G(\beta, \beta/2 + \gamma) = 1 \quad (54)$$

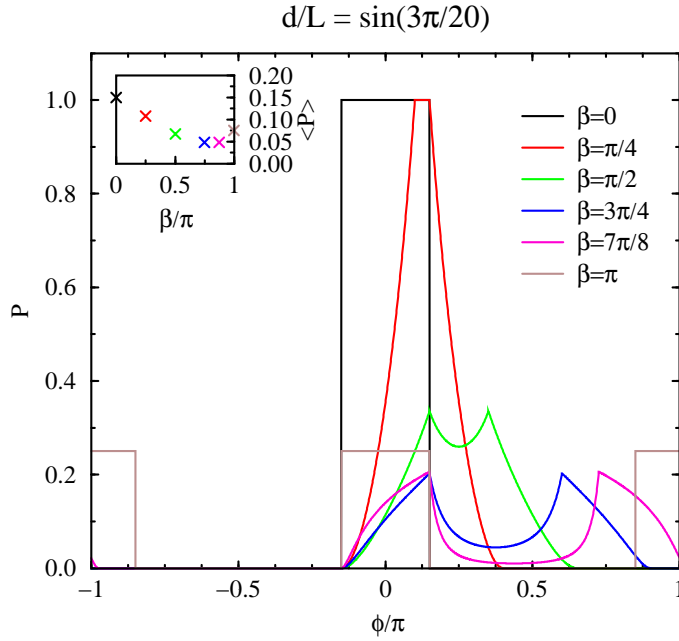


Abbildung 4: Die „Wahrscheinlichkeit“ (52) als Funktion des Herkunftswinkels. Hier ist $\langle P \rangle$ eine Funktion von β .

erkennbar wird. Bezeichnen wir nämlich

$$A_+ \equiv A(\phi = \beta/2 + \gamma) \quad , \quad B_+ \equiv B(\phi = \beta/2 + \gamma) \quad (55)$$

$$A_- \equiv A(\phi = \beta/2 - \gamma) \quad , \quad B_- \equiv B(\phi = \beta/2 - \gamma) \quad , \quad (56)$$

so liefert (54) die Kreuzbeziehungen

$$A_- = 1/B_+ \quad , \quad B_- = 1/A_+ \quad , \quad (57)$$

und damit vermöge (40d) die Gleichheit

$$\begin{aligned} P_- &\equiv \Phi(B_-) - \Phi(A_-) = 1 - \Phi(A_+) - (1 - \Phi(B_+)) \\ &= \Phi(B_+) - \Phi(A_+) \equiv P_+ \quad . \end{aligned} \quad (58)$$

D.h. in Eigenschaft (40d) liegt der Grund für die Spiegelsymmetrie der Kurven $P(\phi)$ um den Wert $\phi = \beta/2$, welche in allen Plots gut sichtbar ist. Sie ist physikalisch auch leicht zu verstehen: Die Trajektorien der beiden Teilchen definieren zusammen mit ihrer anfänglichen Verbindungslinie ein Dreieck mit den Winkeln ϕ , $\pi - \beta$ und ϕ' . Dabei ist ϕ' der Herkunftswinkel des Probesteilchens vom Stoßpartner aus betrachtet, d.h. der Herkunftswinkel nach einem Rollentausch der beiden Teilchen. Da ein solcher Rollentausch an der physikalischen Situation nichts ändert⁶, muss $P(\phi) = P(\phi')$ gelten. An der Winkelsumme $\phi + \pi - \beta + \phi' = \pi$ liest man sofort die Beziehung $\phi + \phi' = \beta$ ab. Der Symmetriepunkt ist demnach $\phi = \phi' = \beta/2$, also die Situation des gleichschenkligen Dreiecks, in dem sich beim Rollentausch gar nichts ändert.

⁶Hier setzen wir wieder identische Geschwindigkeitsverteilungen voraus, was auch zu (40d) führte.